G.D.T Borel II

Motivation (K-théorie pour les nuls)

R anneau associatif unitaire $n \geq 1$

$K_n(R)$ gr de K-théorie alg de R

$GL(R) = \varinjlim GL_n(R) \qquad GL_n(R) \hookrightarrow GL_{n+1}(R)$, $g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$$K_1(R) = GL(R)_{ab} = H_1(GL(R), \mathbb{Z}) = \varinjlim H_1(GL_n(R), \mathbb{Z})$$

ex 1) F corps (pas nec. comm) $\Rightarrow K_1(F) \simeq (F^\times)_{ab}$ (Dickson, Dieudonné)

2) F corps de nb $\Rightarrow K_1(\mathcal{O}_F) \simeq \mathcal{O}_F^\times$ (Bass-Milnor-Serre)

$K_n(R) = \pi_n(X_R)$ X_R est un CW-complexe et un H-espace + $\underbrace{B(GL(R))}_{\text{espace classifiant}} \longrightarrow X_R$ qui induit $GL(R) \to K_1(R)$ sur les π_1 et

$$H_*(BGL(R), M) \xrightarrow{\simeq} H_*(X_R, M) \quad \forall M \text{ un } K_1(R)\text{-mod}$$

$$\simeq H_*(GL(R), M)$$

Pour nous : X_R est un H-espace $\overset{\text{Cartan-Serre}}{\Longrightarrow}$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \pi_n(X_R)\otimes\mathbb{Q} & \xrightarrow[\text{Hurewicz}]{\sim} & \mathrm{Prim}\, H_n(X_R,\mathbb{Q}) \\ \| & & \wr\| \\ K_n(R)\otimes\mathbb{Q} & & \mathrm{Prim}\, H_n(GL(R),\mathbb{Q}) \end{array}}$$

$n\geq 2 \Rightarrow$ peut remplacer $GL(R)$ par $SL(R)$

<u>Coh stable des groupes ariths</u> $H(x)=H(x,\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \hookrightarrow & G_2 & \hookrightarrow & \cdots \\ \cup & & \cup & & \\ \Gamma_1 & \hookrightarrow & \Gamma_2 & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

G_n gr alg déf $/\mathbb{Q}$ connexes, presque simples

$G_n(\mathbb{R})$ connexe

OK si $G_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe (th de Cartan)

$\Gamma_n\subset G_n(\mathbb{Q})$ ssg arith

$\Gamma=\varinjlim \Gamma_n$

<u>Th</u> (Borel) Si $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}\, G_n\to\infty$ alors $\forall q$

$$H^q(\Gamma)=\varprojlim H^q(\Gamma_n)=\varprojlim H^q_{cont}(G_n(\mathbb{R}))$$

<u>Dem</u> $H^q(\Gamma)=H_q(\Gamma)^*=\left(\varinjlim H_q(\Gamma_n)\right)^*$

$=\varprojlim H_q(\Gamma_n)^*=\varprojlim H^q(\Gamma_n)$

on a vu si $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}\, G_n>2(q+1)$ alors

$$H^q_{cont}(G_n(\mathbb{R}))\xrightarrow[\text{restr}]{\sim} H^q(\Gamma_n)$$

$\square$

Rk 1) ds les applications $\forall q$ $H^q_{cont}(G_n(\mathbb{R}))$ est stationnaire, donc les $H^q(\Gamma_n)$ aussi et $H^q(\Gamma)$ est de dim $< \infty$

2) $\exists$ version S-arith des résultats de Borel

$\rightsquigarrow$ on peut remplacer les Γ_n par $G_n(\mathbb{Q})$ ds le th.

3) th très difficile (Borel, Yang, Blasius, Franke, Grunewald)

$\forall\, G/\mathbb{Q}$ simpl connexe, connexe, abs presque simple $H^q(G(\mathbb{Q})) \xrightarrow{\sim} H^q_{cont}(G(\mathbb{R}))$.

<u>Groupes sur un corps de nb</u> F corps de nb

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \hookrightarrow & G_2 & \hookrightarrow & \cdots \\ \cup & & \cup & & \\ \Gamma_1 & \hookrightarrow & \Gamma_2 & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

G_n/F connexes, abs presque simples, $G_n(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ connexe

Th Si $F\text{-rg}(G_n) \to \infty$ $\forall q$

$$H^q(\Gamma) = \varprojlim H^q(\Gamma_n) \simeq \varprojlim H^q_{cont}(G_n(F \otimes \mathbb{R}))$$

Si de plus $\forall\, v \mid \infty$ place infinie de F la suite $H^n_{cont}(G_n(F_v))$ est stationnaire, alors

$$H^\bullet(\Gamma) \simeq \bigotimes_{v\mid\infty} \varprojlim{}^* H^\bullet_{cont}(G_n(F_v))$$

où $\varprojlim{}^* A_n = \bigoplus_j \left(\varprojlim_n A_n^j \right)$ $\quad A_n = \bigoplus_j A_n^j$

Dem on applique le th prec aux $G'_n = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} G_n$

$G'_n(\mathbb{Q}) = G_n(F) \supset \underset{\text{arith}}{\Gamma_n}$

$G_n(F \otimes \mathbb{R}) = \prod_{v|\infty} G_n(F_v)$

$\rightsquigarrow \quad H^{\cdot}_{cont}(G_n(F \otimes \mathbb{R})) \simeq \bigotimes_{v|\infty} H^{\cdot}(G_n(F_v))$

Sous l'hyp du th on peut passer à la limite en utilisant $\varprojlim V_n \otimes W_n \simeq (\varprojlim V_n) \otimes (\varprojlim W_n)$ si V_n et W_n sont stationnaires. $\square$

Calcul de $\varprojlim H^q_{cont}(G_n(\mathbb{R}))$

$H^q_{cont}(G_n(\mathbb{R}))$

$= H^q(X_n)$ dual compact de l'esp sym $G_n(\mathbb{R})/K_n \leftarrow$ sg max

$G_{n,u}/K_n$

$(K_n \subset G_{n,u} \subset G_n(\mathbb{C}))$

Si les G_n forment "une suite classique", les X_n forment un système inductif dont la limite $X = \varinjlim X_n$ est un H-espace et

$$H^q(X) \simeq \varprojlim H^q(X_n) \simeq \varprojlim H^q_{cont}(G_n(\mathbb{R}))$$

Moralité : $H^{\cdot}(\Gamma) = H^{\cdot}(X)$

Numérologie

G_n	K_n	$G_n(\mathbb{C})$	$G_{n,u}$	X_n	X	$H^*(X)$
$SL_n(\mathbb{R})$	SO_n	$SL_n(\mathbb{C})$	SU_n	SU_n/SO_n	SU/SO	$\Lambda(x_5, x_9, \dots)$
$SL_n(\mathbb{C})$	SU_n	$SL_n(\mathbb{C})\times SL_n(\mathbb{C})$	$SU_n\times SU_n$	SU_n	SU	$\Lambda(x_3, x_5, \dots)$
$SL_n(\mathbb{H})$	Sp_n	$SL_{2n}(\mathbb{C})$	SU_{2n}	SU_{2n}/Sp_n	SU/Sp	$\Lambda(x_5, x_9, \dots)$
$Sp_{2n}(\mathbb{R})$	U_n	$Sp_{2n}(\mathbb{C})$	Sp_n		Sp/U	$\mathbb{R}[x_2, x_6, x_{10}, \dots]$
$Sp_{2n}(\mathbb{C})$	Sp_n	$Sp_{2n}(\mathbb{C})\times Sp_{2n}(\mathbb{C})$	$Sp_n\times Sp_n$	Sp_n	Sp	$\Lambda(x_3, x_7, \dots)$

$U_n(\mathbb{H}) = Sp_{2n}(\mathbb{C}) \cap U_{2n}$

Thm (périodicité de Bott) Pour X comme ci-dessus

$$\pi_n(X) = \pi_{n+8}(X)$$

Les dim $\pi_n(X)\otimes\mathbb{R}$ sont 2 ou 4-périodiques

$= \dim \operatorname{Prim} H_n(X)$

données par $\begin{cases} 1 & n = 3, 5, \dots \text{ si } X = SU \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \text{ si } n = 5, 9, \dots & \text{pour } X = SU/SO,\ SU/Sp \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Le th de périodicité de Brel F corps de nb

D/F alg à division de centre F et dim finie

$R \subset D$ ordre (sous-anneau, type fini comme $\mathbb{Z}$-module et tq $R \otimes \mathbb{Q} = D$)

$F \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$

Th (Borel) Pour $n \geq 2$

$$\dim K_n(R) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ r_2 & n \equiv 3\ [4] \\ r_1 + r_2 & n \equiv 1\ [4] \end{cases}$$

Rks 1) Quillen : $K_n(\mathcal{O}_F)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$

la partie de torsion très délicate :

. [Kurihara] $K_{4n}(\mathbb{Z}) = 0\ \forall n \geq 1 \Leftrightarrow$ conj de Vandiver ($\forall p\ p \nmid cl\ \mathbb{Q}(\zeta_p)^+$)

. $$\frac{|K_{4n-2}(\mathbb{Z})|}{|K_{4n-1}(\mathbb{Z})|} = \frac{(-1)^n}{2} \zeta(1-2n) \quad \forall n$$

2) Version S-arith $\Rightarrow$ th ok avec R remplacé par D

Preuve du th $SL_n(D) = G_n(F)$ pour un

F-groupe alg connexe G_n ($G_n(\mathbb{C}) = SL_?(\mathbb{C})$)

$F\text{-rg}(G_n) = n-1 \to \infty$ $\quad \Gamma_n = SL_n(R) \subset SL_n(D) = G_n(F)$

sg arith

le $A_n \Rightarrow H(\Gamma) = \bigotimes_{v|\infty} \varprojlim^* H_{cont}(G_n(F_v))$

pour v complexe $G_n(F_v) = G_n(\mathbb{C}) = SL_{nd}(\mathbb{C})$

$(\dim_F D = d^2)$

v réelle $G_n(F_v) = SL_{nd}(\mathbb{R})$ ou $SL_{\frac{nd}{2}}(\mathbb{H})$

$\Rightarrow \varprojlim^* H^\cdot_{cont}(G_n(F_v)) = H^\cdot(SU)$ v complexe

$\underbrace{SU/SO \text{ ou } SU/Sp}_{\text{si } v \text{ réelle}}$

$$\boxed{\Rightarrow H^\cdot(SL(R)) \xrightarrow{\sim} \Lambda(x_5, x_9, \dots)^{\otimes r_1} \otimes \Lambda(x_3, x_5, \dots)^{\otimes r_2} \quad \Rightarrow \text{résultat !}}$$

<u>Stabilité pour Sp_{2g}</u> $G_g = Sp_{2g}/\mathbb{Q}$ $\cancel{\mathbb{Q}}\text{-rg} = g$

$\Gamma_g = G_g(\mathbb{Z})$

cp max de $G_g(\mathbb{R})$ est $U_g = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in G_g(\mathbb{R}) \right\}$

$A + iB$

$G_g/U_g \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{H}_g} = \left\{ Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z, \ \operatorname{Im} Z > 0 \right\}$

demi-espace de Siegel

$G_g \circlearrowright \mathcal{H}_g$ $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$

Dual compact :

$X_g = GSp_{2g}(\mathbb{C}) / \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in GSp_{2g}(\mathbb{C}) \right\}$

$= \{ L \subset \mathbb{C}^{2g} \mid \dim L = g$, total isotropes pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix} \}$

$\rightsquigarrow$ peut calculer "facilement"

$H^{\cdot}(X = \varinjlim X_g) = \mathbb{R}[x_2, x_6, x_{10}, \dots]$

$x_{2i} = c_i(E)$ classe de Chern du "fibré de Hodge"

$\exists$ plongement ouv $\mathcal{H}_g \hookrightarrow X_g$

$\rightsquigarrow$ fibré sur $\mathcal{H}_g$, qui descend à $\Gamma_g \backslash \mathcal{H}_g = \mathcal{A}_g$
$\Gamma_g = Sp_{2g}(\mathbb{Z})$

l'espace des var abd. princ. polarisées de dim g

$(\mathrm{cl}(Z) \longmapsto \mathbb{C}^g /$ réseau eng par les colonnes de $(Z, 1_g))$

$\rightsquigarrow H^{\cdot}(\mathcal{A}_g, \mathbb{Q}) = H^{\cdot}(\Gamma_g, \mathbb{Q})$ calculable en deg $\leq g-1$ (Tsuhishiku) si $g \geq 3$

Th (stabilité pour $\mathcal{A}_g$) $H^{\cdot}(\mathcal{A}_g, \mathbb{Q})$ se stabilise en deg $\leq g-1$ et vaut $\mathbb{Q}[x_2, x_6, x_{10}, \dots]$

en part $H^2(\mathcal{A}_g, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$